feemcat
federació d'entitats per a l'ensenyament
de les matemàtiques a Catalunya

Resolució de problemes del Fem Matemàtiques

Carme Vicens i Cyntia Riquelme
Membres del Grup de Resolució de Problemes FEEMCAT

Totes les bones iniciatives que perduren al llarg del temps ho fan perquè evolucionen i s'adapten segons les necessitats del moment, ja que són ens vius. En aquest cas, parlem d'una iniciativa que ara compleix vint-i-cinc anys i que es va arrelant a tot el nostre territori escolar engrescant alumnes i docents a gaudir de les matemàtiques a partir de reptes i problemes competencials.

Tot va néixer fa vint-i-cinc anys en el cap de tres professors de Reus, en el niu d'una societat immersa en un moviment d'innovació didàctica que va fer néixer grups de treball i associacions d'ensenyants de Catalunya compromesos amb el mateix objectiu. L'Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals (APMCM) va néixer, d'una banda, perquè hi havia una inquietud entre el professorat de Reus (una vintena de docents) per crear una revista (*Biaix*, que després seria de tota la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya [FEEMCAT] i després canviaria de nom), si bé ja estava fent molta activitat formativa i divulgativa de plantejaments innovadors, i, de l'altra, perquè volia fer activitats dirigides a l'alumnat. L'APMCM es va constituir el 1991 i l'Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines (ADEMGI) el 1992, i les primeres converses «gestant el FM» es van produir el 1994. Podeu llegir la història completa en els magnífics articles de Xavier Vilella i Elisabet Saguer en el número 43 de *Nou Biaix*.

En aquell moment s'havien de proposar alumnes candidats per a les olimpíades matemàtiques (vegeu la història) i se'ls va ocórrer fer la selecció a partir d'un petit concurs de resolució de problemes on es poguessin ponderar els raonaments i les justificacions matemàtiques, a més dels resultats correctes.

I la iniciativa es va anar estenent alhora que creixia la necessitat de fer-hi participar tot l'alumnat de Catalunya. Ho va fer gràcies a la xarxa d'associacions catalanes de matemàtiques. El FM del 1995 va ser la primera activitat conjunta de la FEEMCAT.

D'una primera fase de treball d'equips, única per a totes les associacions, es va passar a fer segones fases locals i individuals, i la tercera fase o final era la que seleccionava els alumnes per representar Catalunya a les olimpíades nacionals. Així és encara avui en dia. Cada any, una de les associacions, per torns, pren la responsabilitat de preparar els problemes de les fases primera i final, i les segones fases es fan de manera local.

Com hem dit abans, els projectes van agafant formes i models que s'adapten a les necessitats dels grups i de la societat a les quals van dirigits. I així, des del curs 2018-2019, totes les societats catalanes agrupades en la FEEMCAT vam decidir unir els nostres esforços amb l'objectiu de fer un projecte global i únic sense haver de perdre les característiques locals de cada grup i vam crear un grup de treball únic: Grup de Resolució de Problemes FEEMCAT per al concurs Fem Matemàtiques, que vol anar més enllà del que significa fer els problemes de les fases de manera conjunta.

Sabem que el Fem Matemàtiques és un molt bon recull de problemes competencials i ens agradaria que aquests problemes entressin a les aules com a recurs, aprofitant el camí fet durant els vint-i-cinc anys del concurs. Creiem que el banc de problemes del FM té riquesa suficient per omplir tot el currículum. Però potser caldria fer un pas més en l'anàlisi per veure si, per exemple, els problemes cobreixen tots els blocs de continguts, com cal treballar els problemes de la fase 1 a l'aula o si es poden adaptar més a les noves tecnologies o a la tipologia d'alumne actual. Fins i tot ens podem preguntar si el format seria compatible amb les noves metodologies, com ara l'elaboració d'un projecte matemàtic. Per què no?

També considerem que el treball conjunt i en equip enriquirà mútuament els grups que es dediquen al concurs, en formar un grup més ampli de docents amb el mateix interès.

Els problemes proposats en totes les fases, per tant, són els mateixos, escollits amb els mateixos criteris i avaluats també amb un enfocament més competencial, posant el pes en els processos matemàtics que promouen les dimensions del nostre currículum.

Aquests van ser els nostres propòsits quan vam començar el curs amb el bon regust de saber-se acompanyat i amb la perspectiva d'un treball enriquit pel fet de fer un grup més potent.

En aquests moments la paraula competencial està molt de moda, però de ben segur que qualsevol dels problemes amb què va començar el concurs és vigent avui en dia.

En el *Nou Biaix* número 8, l'any 1995, es publicà un monogràfic sobre el concurs i la didàctica de resolució de problemes que té per objectiu principal «ensenyar a pensar matemàticament» (A. Vila, 1995). Si llegiu amb deteniment alguns d'aquests paràgrafs, veureu que s'hi descriuen exactament els mateixos objectius que aquest grup de treball es proposa avui, al 2019!

> Un dels autors que més explícitament ha fet referència a aquest paper de la Resolució de Problemes és Schoenfeld [2], qui apunta la conveniència no tant de parlar d'ensenyar a resoldre problemes sinó d'ensenyar a ***pensar matemàticament***, entenent que *pensar matemàticament* consisteix a modelitzar, simbolitzar, abstraure i aplicar idees matemàtiques a un ampli rang de situacions. En aquest marc, els problemes jugarien el paper essencial de *"punt de sortida de les discussions matemàtiques"*.

Realment, són moltes i molt diverses les dificultats per «dur a l'aula» un treball amb Resolució de Problemes sota un model d'aquest tipus, model que podem anomenar com *«el problema com una eina per afavorir el pensament matemàtic»*.

Fer realitat aquest «somni» depèn en gran mesura de **«com FEM MATEMÀTIQUES a l'aula»**. Unes matemàtiques on els problemes proposats a l'aula plantegen situacions a l'abast de tothom, no bloquegen d'entrada, interessen, es converteixen en reptes, afavoreixen l'intercanvi d'idees, admeten diferents nivells de resposta (lligats a les diferents capacitats o estils), provoquen una posterior ampliació o revisió,...

És en aquest plantejament general que l'any passat, i enguany novament, us vàrem convidar amb moltes ganes a **compartir**, durant uns dies i a tota Catalunya, una activitat (no més interessant que moltes altres) que ens va portar a ***TOTS PLEGATS... A FER MATEMÀTIQUES***.

El que sentim els que agafem el relleu és una gran admiració pels que ja intuïen el camí per fer dels problemes una forma de pensar matemàticament amb tot el que es considera: «modelitzar, simbolitzar, abstraure i aplicar idees matemàtiques a un ampli rang de situacions». I també somiaven a fer problemes «a l'abast de tothom, que no bloquegen d'entrada, interessen, es converteixen en reptes, afavoreixen l'intercanvi d'idees [. . .]».

Ens encanta veure que ja en els seus orígens es considerava una avaluació amb pes en els processos:

I és des d'aquesta perspectiva des de la qual vàrem analitzar les solucions: vàrem observar qui era capaç de dissenyar una estratègia, qui era prou flexible com per canviar-la quan veia que l'anterior no el portava enlloc, qui necessitava moure's en «terrenys concrets», qui sabia conduir una resolució en termes «formals», qui tenia una certa capacitat per visualitzar formes i relacions geomètriques o per comunicar els seus raonaments, qui sabia buscar vies alternatives quan no relacionava aquell problema amb cap «tècnica apresa»,...

D'aquesta manera, els problemes permetien diversos graus de resposta i totes eren encertades i, per tant, eren un bon instrument per al tractament de la diversitat a l'aula i per reforçar la capacitat d'autoestima dels alumnes:

I era cert ! Els problemes admetien molts nivells de resposta: des de la resposta que es movia en un nivell de constatació o contrastació empírica d'una situació, fins a la que era fruit d'un raonament abstracte o en termes de generalització. Aquesta és **una de les característiques que ens agradaria reivindicar en els problemes de matemàtiques a l'aula**: situacions prou riques (malgrat siguin molt simples) com per poder admetre un ampli rang de nivells de resposta. Això permet d'una banda un **tractament real i senzill de la diversitat a l'aula**, sense necessitat de plantejar activitats ni recorreguts d'aprenentatge diferenciats; i d'altra banda incideix directament en un aspecte que és pre-requisit indispensable per poder aprendre matemàtiques: reforçar la capacitat d'auto-estima.

I el que és més important, per canviar l'enfocament de les matemàtiques a l'aula:

> que iniciatives com el FEM MATEMATIQUES són un pas més per **canviar entre tots plegats l'enfocament de les matemàtiques a l'aula**, treballant-les des d'una perspectiva més global, més reflexiva, menys academicista i molt més funcional, i també, per què no dir-ho, molt més atractiva per a l'alumnat.

Havent llegit tot això, ens adonem que els enfocaments amb fonament sempre es poden aplicar, que les innovacions didàctiques en el camp de l'educació són lentes d'instaurar, però són perdurables en el temps, i que el que cal fer és contagiar i estendre les bases d'aquell esperit fundador, més actual que mai.

Sabeu això que «quan llegeixes certes idees ja no hi ha res més a afegir. . . Tot està dit!». Quins grans objectius!

Aquest és un dels problemes proposats en aquell primer Fem Matemàtiques per a tots els nivells (6è, 7è i 8è d'EGB) per resoldre en equip en la que seria la fase 1 actual. Tot i que el problema era el mateix, les resolucions eren diferents en funció del nivell:

PROBLEMA 1

No fa gaire temps que s'ha acabat el Ral.li Granada-Dakar. Com que hi participaven corredors catalans, ens ha estat fàcil conèixer directament algunes aventures del viatge.
Entre aquestes aventures n'hi ha una de força curiosa. És la següent:

Un dels equips participants s'estava preparant per recórrer un camí que en el seu mapa (escala 1:450.000) tenia una longitud de 926 mil.límetres i si volien seguir mantenint el seu lloc els calia fer-los amb un temps màxim de 2h 46m 49s. Abans d'iniciar l'aventura els calia tenir una idea clara de la velocitat mitjana del recorregut per anar-s'hi adaptant durant tota l'etapa. Quan es disposaven a fer els càlculs amb la seva calculadora van observar que les tecles del 9, del 6 i del 0 no funcionaven, s'hi havia posat sorra del desert i les havia inutilitzades. Ràpidament van comprovar que a la pantalla es veiessin tots els números, encara que aquestes tecles no funcionessin. En observar que era així i coneixent com coneixien el sistema de numeració i el significat de les operacions els va ser molt fàcil calcular, amb la seva calculadora espatllada, la velocitat en quilòmetres per hora.
Cal dir que aquest equip, aquest dia, ni es va perdre ni se li va trencar cap peça ni aparell del cotxe, i gràcies als seus càlculs va poder aconseguir arribar en el temps que s'havia proposat.

Ara cal que expliqueu com han fet les comprovacions i els càlculs els dos participants del ral.li per arribar a saber la velocitat mitjana que els calia portar. A més, podríeu imaginar una altra situació on s'haguessin de fer càlculs amb una calculadora que tingués alguna tecla espatllada (vosaltres heu de dir quines tecles i quins càlculs) i explicar com ho faríeu.

Solucions:

1. Naturalment, hem començat per la lectura del problema. Ja ens havien dit que no ens desanimessim si no l'enteniem, que la primera lectura serviria justament per detectar les dificultats de comprensió. Efectivament, hi havia unses quantes coses que no sabiem interpretar, malgrat que les paraules emprades si que les haviem sentit:

- En primer lloc, no saviem què significava *"escala 1:450.000"*.
- Tampoc teniem massa clar què és la *"velocitat"* i com es calcula.
- Per últim, hem tingut algun petit entrebanc inicial per esbrinar què significava que algunes tecles no funcionaven encara que si es veiessin tots els números a la pantalla (aquesta dificultat no la comentarem perquè no ha tingut gaire importància).

grup de 6è

1. Lectura comprensiva, per saber de què va.
2. Llegir-ho per parts
3. La velocitat mitjana = $\frac{\text{espai (Km)}}{\text{temps (hores}}$ (Ens ho ha dit la mestra)

ESPAI

4. Hem de passar els mil·límetres a km i el 926 transformar-lo doncs no podem utilitzar les tecles del 9 ni del 6.
926 el transformem en dos sumands 413+513, i mentalment 450.000 mm = 45 dam.

grup de 7è

El grup de 8è, per fer aquests càlculs:

3.- Utilitzant l'escala, hem calculat la distància real:

(926 : 1000) . (450000: 1000) = 416,7 Km.

van fer els passos següents amb la calculadora (ja que no podien utilitzar les tecles 9, 6 i 0):

TECLEGEM	DIGITS QUE VEIEM EN PANTALLA
AC	0.
8, 1, 5	815.
+	815.
1, 1, 1	111.
=	926.
:	926.
(	(01 0.
8, 8, 8	888.
+	888.
1, 1, 2	112.
)	1000.
=	0.926
x	0.926
(	(01 0.
4, 4, 8	448.
+	448.
2	2.
=	416.7

Els problemes actuals del concurs es recullen en la pàgina web http://fm.feemcat.org/. S'hi poden trobar els problemes de cada edició de totes les fases, juntament amb les instruccions per participar-hi mitjançant la inscripció en les diverses associacions i amb les notícies de cada edició: convocatòries, alumnes finalistes...

Si hi feu una ullada, segur que hi trobareu problemes que us agraden i que us poden ajudar a iniciar el camí cap a unes matemàtiques competencials. Penseu que, per exemple, aquest any hi ha nou problemes de la fase 1, nou més de la fase 2 i nou més de la fase final!

Vegeu a continuació unes mostres de problemes del concurs de les diferents fases d'aquest any passat.

2. EMBOLICAR REGALS

Acabem de rebre un encàrrec. Una botiga de regals vol estalviar en les seves despeses. Si tenim capses de base quadrada, ens demanen:

Quin seria el mínim quadrat de paper necessari per embolicar-la?

regal

paper d'embolicar

La capsa té forma de prisma amb base quadrada d'alçada menor que l'amplada i fondària.

Investigueu amb diferents mides del paper i diferents posicions i proposeu una solució, tot explicant les diferents opcions que heu valorat i descartat i per què heu escollit la vostra.

Problema fase 1 6è FM19

3. CUBS NUMERATS

Tenim 6 cubs, cadascun dels quals té el mateix nombre escrit a les seves sis cares, però cada cub té un número diferent al dels altres cubs, de l'1 al 6. Els apilem formant una paret, que ha de tenir només un cub de gruix. A més, com és habitual, els cubs s'han de col·locar de la següent manera: la cara d'un cub contra la cara d'un altre.

Per exemple en la fotografia veiem que la paret de l'esquerra està construïda correctament, sent una paret de només un cub de gruix. En canvi la de la dreta **NO** es permet, ja que la paret té dos cubs el gruix.

Concretament, avui ens proposem que aquesta paret tingui forma d'escala. En podem fer moltes, en aquesta fotografia te'n mostrem un **exemple**. Si vols, pots comprovar que la suma total dels nombres visibles d'aquesta paret en forma d'escala és 78.

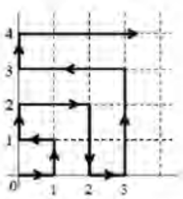
Ara et toca treballar a tu: Posa els 6 cubs en forma d'escala, de la manera que creguis més adient, i **suma tots els números visibles.**

a) Quin és el total més elevat que pots obtenir utilitzant aquesta forma d'escala? Descriu quina escala has construït.
b) Quin és el total més baix que pots obtenir utilitzant aquesta forma d'escala? Descriu quina escala has construït.
c) Explica per escrit com has calculat els totals d' a) i b). Assegura't d'argumentar bé el teu mètode.
d) Ara et demanem que obtinguis un total de 75 amb una forma d'escala. Descriu quina escala has construït.

Problema de la fase final 6è FM19

2. LA FORMIGA

Una formiga es mou sobre una quadrícula com es mostra en el dibuix de la dreta.
Si ens mirem la quadrícula com si hi haguéssim definit uns eixos de coordenades, podríem dir que durant el primer segon es mou de l'origen fins al punt (1 , 0). Durant el següent segon es mou fins al punt (1 , 1). I seguidament continua movent-se a una velocitat d'1 unitat de distància per segon, sempre constant i sempre paral·lelament als eixos, com ens indica el dibuix: (0 , 1) , (0 , 2) , (1 , 2) , (2 , 2) ,...



a) En quin punt es trobarà al cap de 25 segons?
b) Observes alguna pauta en relació a "en quin moment" es mou per damunt de l'eix vertical? I de l'eix horitzontal? Explica-ho de forma molt clara.
c) En quin punt es trobarà la formiga al cap de 2 minuts de començar el moviment? I al cap de 25 minuts? Explica de forma molt clara com arribes a aquesta conclusió.
d) Pots explicar algun mètode que ens permetés esbrinar en quin punt es trobaria la formiga sabent només el temps que ha estat movent-se i sense necessitat de fer cap dibuix més?

Problema de la fase final, 2n, FM 2019

3. TOTES BLANQUES, TOTES NEGRES

Aquest és un joc per a un jugador. Tens 7 fitxes que són blanques per una cara i negres per l'altra disposades de la següent manera:

● ○ ● ○ ● ○ ●

Un moviment consisteix a tombar dues fitxes consecutives alhora.

Es tracta d'aconseguir totes les fitxes blanques en el menor nombre possible de moviments.

a) Juga unes quantes vegades. En quants moviments ho has aconseguit? Creus que es pot aconseguir amb menys moviments? Raona la teva resposta.

b) Canviem ara les normes del joc. En lloc de totes blanques, vols aconseguir les fitxes totes negres. Prova-ho unes quantes vegades. Explica les conclusions a les quals arribes.

Juga ara amb 9 fitxes disposades de la següent manera:

● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ●

c) En quants moviments pots aconseguir que totes les fitxes siguin blanques? I que siguin negres? Explica les teves conclusions.

Problema de la fase 1, 1r ESO, FM 2019

Per acabar i amb el mateix esperit de portar aquests problemes competencials a l'aula i com a guia per al professorat, s'ha creat el Banc de Recursos del Fem Matemàtiques, https://bancfm.blogspot.com/, que va començar recollint els problemes més interessants del FM i les seves solucions, però, en veure la riquesa de les diferents aportacions i respostes dels alumnes, va anar més enllà. Actualment s'hi pot trobar una exhaustiva anàlisi competencial d'alguns dels problemes del FM, la qual fa un èmfasi especial en els diferents nivells d'assoliment per afavorir una avaluació competencial. Tot això es fa a partir d'exemples de resolucions i raonaments dels mateixos alumnes, que recullen les diverses estratègies i processos que potencien aquests tipus de problemes.

SOPAR AMB ESPELMES

Problema de la 2ª fase 2017. 6è primària

Etiquetes: Divisibilitat. Tècniques de recompte. Treball sistemàtic[1]. Pràctica exhaustiva[1]. Avaluació competencial. Rúbriques

Bloc de continguts: Numeració i càlcul.

Nivells: 6è i 1r

Enunciat:

2.–Sopar amb llum d'espelmes

La Laura ha organitzat un sopar al seu jardí. Per il·luminar les taules fa servir canelobres de dos, tres o quatre braços. La Laura ha utilitzat al menys un canelobre de cada tipus i a tots ha col·locat una espelma a cada braç. En total ha necessitat 20 espelmes.

Escriviu totes les possibilitats que té la Laura per triar els canelobres que fa servir.

2,5 punts

Sopar d'espelmes:
https://bancfm.blogspot.com/2017/05/lavaluacio-competencial-treball.html

Des de la web del Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques (CREAMAT), en la seva campanya «Dimensió Web» trobareu una referència al Banc de Recursos i tot el que hi podeu trobar:

Fem MATEMÀTIQUES

- **Proposta 2. Banc de recursos del Fem Matemàtiques**

  Web creat pel grup de treball del *Fem Matemàtiques* d'ABEAM. Molt interessant per aprofundir en el treball competencial, de forma especial en les competències relacionades amb la *Resolució de problemes*, *Raonament i prova* i *Comunicació i representació*. En aquest web no només trobem una selecció de problemes comentats sinó, com aspectes destacats, exemples de treball d'alumnes o rúbriques d'avaluació.

https://sites.google.com/xtec.cat/cesire-matematiques-campanyes/inici/dimensi%C3%B3-web/banc-de-recursos-del-fem-matem%C3%A0tiques?authuser=0

Com podeu veure, una primera llavor sembrada amb pocs recursos però amb molta il·lusió s'ha anat fent gran fins a esdevenir un arbre robust i que cada cop té més ramificacions. Això ha estat així gràcies a l'esforç altruista de moltes professores i professors que l'han regat durant aquests vint-i-cinc anys. Queda a les nostres mans continuar fent-ho, ja que els fruits que dona són d'una gran riquesa per a la formació matemàtica del nostre alumnat.